

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*Р.Ф. Марданов*

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

*Учебно-методическое пособие*

Издательство  
Казанского государственного университета  
2007

УДК 517.9

ББК 22.193:22.2

М 25

Печатается по решению учебно-методической комиссии  
механико-математического факультета КГУ

**Рецензент:**  
профессор **А.Г. Егоров**

**Марданов Р.Ф.**

**М 25 Численные методы решения плоской задачи теплопроводности:** учебно-методическое пособие. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007. – 23 с.

Учебное пособие содержит методические указания к выполнению заданий летней вычислительной практики студентов механиков III курса механико-математического факультета.

УДК 517.9

ББК 22.193:22.2

©Марданов Р.Ф.

©Казанский государственный университет, 2007

# Содержание

1	Постановка задачи.....	4
2	Решение панельным методом.....	5
3	Решение методом конечных разностей .....	10
4	Требования к выполнению задания .....	13
5	Варианты заданий.....	14
6	Пример расчета.....	20

# 1 Постановка задачи

В плоскости  $xu$  рассмотрим область  $D$  с однородными по теплопроводности свойствами, ограниченную контуром  $L$  (рис. 1). Коэффициент теплопроводности  $a$  задан. По заданному на границе  $L$  распределению температуры  $T = f(s)$  ( $s$  – дуговая абсцисса) необходимо определить распределение  $T = \Phi(x, y)$  температуры в области  $D$ .

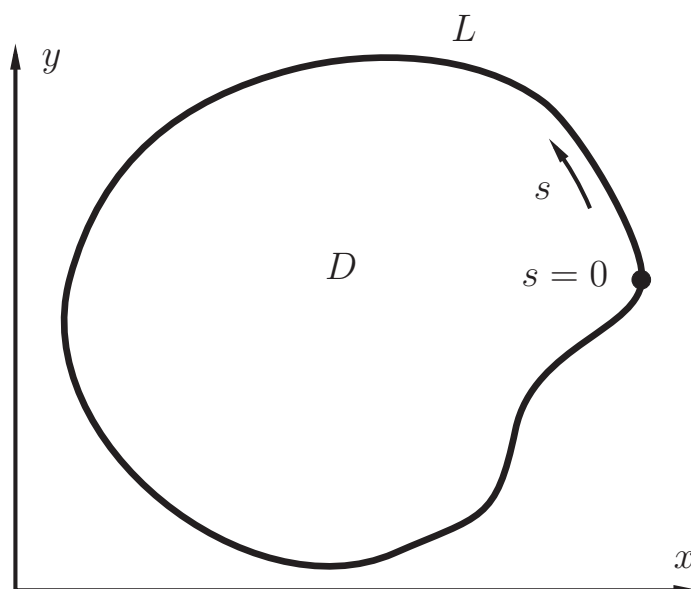


Рис. 1

## 2 Решение панельным методом

Распределение температуры в области  $D$  в стационарном случае при отсутствии притока тепла во внутренних точках области удовлетворяет однородному уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi(x, y) = \frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Очевидно, что решение стационарной задачи не зависит от коэффициента теплопроводности  $a$ .

Суть панельного метода решения уравнения Лапласа заключается в том, что решение отыскивается в виде суперпозиции фундаментальных решений. Разобьем границу  $L$  на  $N$  отрезков – панелей (рис. 2). Обозначим их  $l_i$ , где  $i = \overline{1, N}$  – порядковый номер

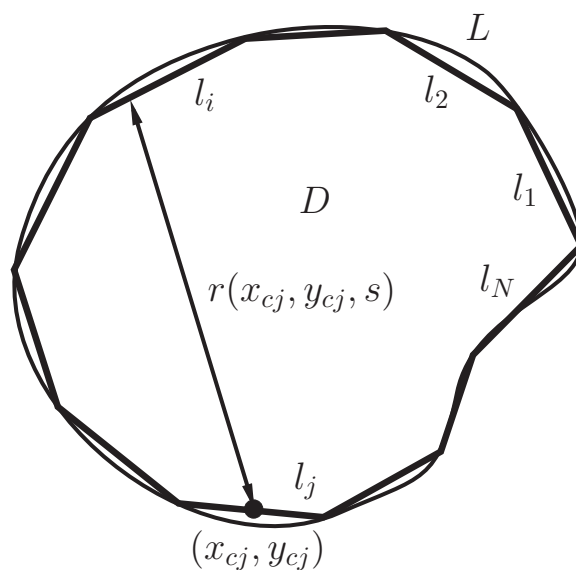


Рис. 2

панели. Распределим вдоль каждой панели источники тепла постоянной интенсивности  $q_i$ . Функцию распределения температуры будем отыскивать в виде

$$\Phi(x, y) = \varphi_0 + \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i(x, y), \quad (1)$$

где  $\varphi_0$  – константа, а

$$\varphi_i(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{l_i} \ln |r(x, y, s)| ds$$

– фундаментальное решение уравнения Лапласа – распределение температуры, индуцируемой источниками тепла единичной интенсивности, распределенными вдоль панели  $l_i$ . Функция  $r(x, y, s)$  – расстояние от точки с координатами  $(x, y)$  в области  $D$  до текущей точки интегрирования на панели  $l_i$  с дуговой абсциссой  $s$ . В выражение (1) входит  $(N + 1)$  неизвестная: константа  $\varphi_0$  и интенсивности распределенных источников  $q_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Для их определения необходимо составить систему из  $(N + 1)$  уравнения.

Для составления системы уравнений используем граничные условия. Потребуем выполнения граничных условий в контрольных точках. В качестве контрольных точек выберем середины панелей с координатами  $(x_{cj}, y_{cj})$ ,  $j = \overline{1, N}$  то есть

$$\Phi(x_{cj}, y_{cj}) = f(s_{cj}),$$

где  $s_{cj}$  – дуговая абсцисса соответствующей контрольной точки. Подставив сюда представление (1) функции  $\Phi(x, y)$ , получим

$$\varphi_0 + \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2\pi} \int_{l_i} \ln |r(x_{cj}, y_{cj}, s)| ds = f(s_{cj}), \quad j = \overline{1, N}.$$

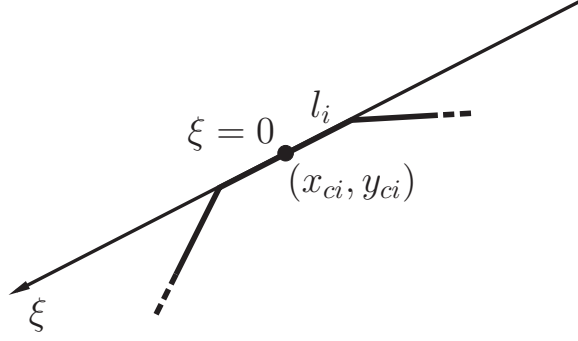


Рис. 3

В случае  $i = j$ , когда контрольная точка находится на панели интегрирования (является ее серединой), функция  $r(x_{cj}, y_{cj}, s)$  обращается в ноль при  $s = s_{ci}$ , и интеграл будет содержать особенность. Для избежания проблем, которые могут возникнуть при численном интегрировании, выведем аналитическую формулу для этого случая. Введем локальную ось  $\xi$  проходящую через панель  $l_i$  так, что точка  $\xi = 0$  совпадает с серединой этой панели (рис. 3). Тогда

$$\int_{l_i} \ln |r(x_{cj}, y_{cj}, s)| ds = \int_{-d_i/2}^{d_i/2} \ln |\xi| d\xi = 2 \int_0^{d_i/2} \ln \xi d\xi,$$

где  $d_i$  – длина панели  $l_i$ . Воспользовавшись аналитической формулой

$$\int \ln \xi d\xi = \xi(\ln \xi - 1),$$

для случая  $i = j$  получим

$$\int_{l_i} \ln |r(x_{cj}, y_{cj}, s)| ds = d_i \left( \ln \frac{d_i}{2} - 1 \right).$$

Для замыкания системы уравнений используем тот факт, что во внутренних точках области  $D$  нет источников тепла. Следовательно,

все тепло, поступившее через один участок границы  $L$ , должно выходить через другой, то есть суммарный приток тепла через границу равен нулю

$$\int_L q(s)ds = 0.$$

Так как интенсивность  $q_i$  источников на каждой панели постоянна вдоль панели, то

$$\int_L q(s)ds = \sum_{i=1}^N \int_{l_i} q_i ds = \sum_{i=1}^N q_i d_i.$$

Таким образом последнее уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^N q_i d_i = 0.$$

В итоге получим следующую систему уравнений

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

где коэффициенты  $a_{ji}$  матрицы  $\mathbf{A}$  следующие:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{ji} = \frac{1}{2\pi} \int_{l_i} \ln |r(x_{cj}, y_{cj}, s)| ds, & i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}, i \neq j, \\ a_{ii} = \frac{d_i}{2\pi} \left( \ln \frac{d_i}{2} - 1 \right), & i = \overline{1, N}, \\ a_{(N+1)i} = d_i, & i = \overline{1, N}, \\ a_{j(N+1)} = 1, & j = \overline{1, N}, \\ a_{(N+1)(N+1)} = 0. \end{array} \right.$$

В коэффициенте  $a_{ji}$  индекс  $j$  отвечает за номер уравнения (строку матрицы), а индекс  $i$  – за номер переменной (столбец матрицы). Строка переменных

$$\mathbf{x} = (q_1, q_2, \dots, q_N, \varphi_0).$$



Столбец свободных членов

$$\mathbf{b} = (f(s_{c1}), f(s_{c2}), \dots, f(s_{cN}), 0)^\top.$$

Интегралы, входящие в коэффициенты  $a_{ji}$ , для  $i \neq j$  необходимо определить численно (например, методом прямоугольников, трапеций или Симпсона).

Полученная система является системой линейных алгебраических уравнений, решить которую можно любым известным численным методом, например, методом Гаусса. Найдя после решения неизвестные константу  $\varphi_0$  и интенсивности распределенных источников  $q_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , значение температуры в произвольной внутренней точке области  $D$  определим по формуле (1).

Для проверки полученного решения можно учесть тот факт, что по свойству гармонических функций  $\Phi(x, y)$  может достигать своего максимального и минимального значения только на границе области  $D$ .

### 3 Решение методом конечных разностей

Другим подходом к решению стационарного уравнения теплопроводности является так называемый метод установления. В этом случае решается нестационарное уравнение теплопроводности с некоторым начальным распределением температуры и стационарными граничными условиями. В решении время устремляется к бесконечности, когда решение “устанавливается”, то есть перестает меняться с течением времени. Это решение совпадает с решением стационарного уравнения.

Нестационарное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - a \Delta \Phi = 0. \quad (2)$$

Коэффициент  $a$  теплопроводности влияет только на скорость установления решения, поэтому положим его равным единице.

В начальный момент времени

$$\Phi(x, y)|_{t=0} = \Phi_0(x, y).$$

Так как решение поставленной задачи не зависит от начального распределения температуры, то можно положить  $\Phi_0(x, y) \equiv 0$ .

Покроем область  $D$  равномерной сеткой с шагами  $\Delta x$  и  $\Delta y$  по  $x$  и по  $y$  соответственно (рис. 4). Запишем следующую разностную аппроксимацию уравнения (2)

$$\frac{\Phi_{i,j}^{k+1} - \Phi_{i,j}^k}{\Delta t} - \frac{\Phi_{i+1,j}^k - 2\Phi_{i,j}^k + \Phi_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} - \frac{\Phi_{i,j+1}^k - 2\Phi_{i,j}^k + \Phi_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} = 0. \quad (3)$$

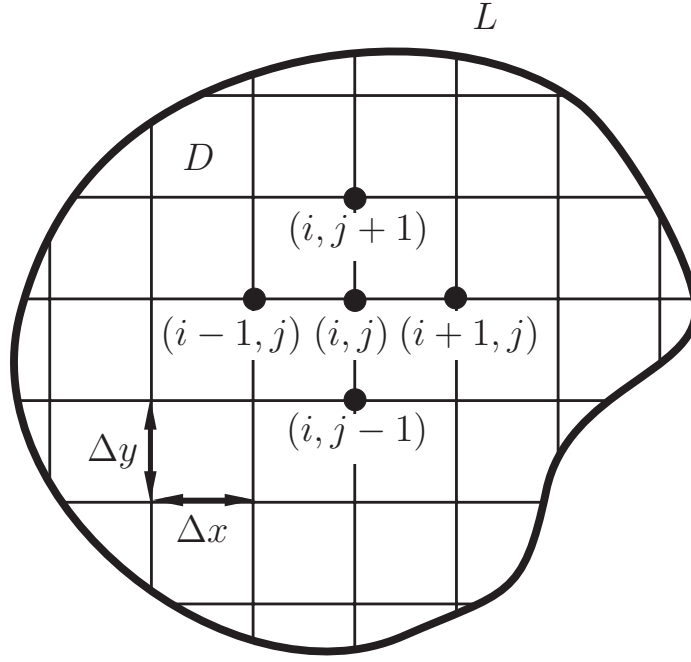


Рис. 4

Здесь  $\Delta t$  – шаг по времени, индекс  $k$  – по времени, индексы  $i$  и  $j$  – по координатам  $x$  и  $y$  соответственно. В выражении (3) все слагаемые записываются для  $k$ -го временного шага и лишь одно – для  $(k+1)$ -го. Поэтому для внутренних точек сетки выразим значение температуры на следующем временном шаге через значения на предыдущем

$$\Phi_{i,j}^{k+1} = \Phi_{i,j}^k + \Delta t \left( \frac{\Phi_{i+1,j}^k - 2\Phi_{i,j}^k + \Phi_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j+1}^k - 2\Phi_{i,j}^k + \Phi_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} \right). \quad (4)$$

Для точек на границе температура определяется из граничного условия

$$\Phi_L^{k+1} = f(s). \quad (5)$$

Точками границы будем считать лежащие на линии  $L$  или ближайšie к ней узлы сетки. В качестве критерия установления решения

используем критерий

$$\max_{i,j} |\Phi_{i,j}^{k+1} - \Phi_{i,j}^k| < \varepsilon, \quad (6)$$

где  $\varepsilon$  – заданное малое положительное число.

Таким образом, можно построить следующую итерационную процедуру решения:

1.  $t = 0$ ,  $k = 0$ .  $\Phi_{i,j}^0 = 0$  для всех внутренних точек в области  $D$ ,  $\Phi_L^0 = f(s)$  для всех точек на границе  $L$ .
2. По формуле (4) вычисляем значения  $\Phi_{i,j}^{k+1}$  во внутренних точках области  $D$ , по (5) –  $\Phi_L^{k+1}$  на границе  $L$ .
3. Если критерий (6) не выполняется, то  $t = t + \Delta t$ ,  $k = k + 1$ , переход на шаг 2. Если выполняется, то итерационный процесс завершен.

При выполнении расчетов необходимо провести исследование устойчивости разностной схемы (3), а именно проверить условие устойчивости

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1}.$$

## 4 Требования к выполнению задания

Необходимо написать две программы, реализующие панельный метод и метод установления решения плоской стационарной задачи теплопроводности. Программы должны:

1. иметь удобное диалоговое окно, позволяющее пользователю ввести все исходные данные задачи с клавиатуры;
2. выполнять многократные расчеты с различными исходными данными (а не работать один раз, закрываясь или выдавая ошибку при попытке повторного расчета);
3. позволять произвести выгрузку результатов расчета в файл для дальнейшего их просмотра графическими математическими средствами;
4. дополнительными баллами будет оценено графическое представление результатов расчета в окне программы и контроль за сходимостью процесса.

Главным критерием при проверке решения будет совпадение результатов, полученных двумя методами. Итогом выполнения задания должен стать отчет, содержащий:

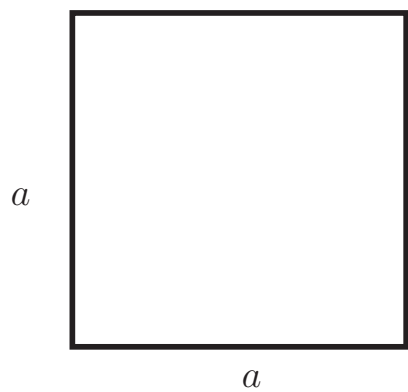
1. кратко постановку задачи и описание методов решения;
2. результаты расчетов поставленной задачи с различными исходными данными, сравнение, анализ, выводы.

## 5 Варианты заданий

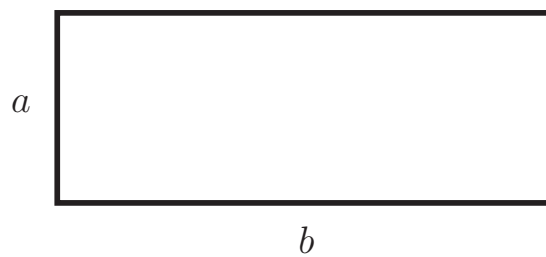
На рис. 5 – 9 представлены варианты заданий. Температура задается в угловых точках. На гранях температура считается постоянной (соответствующей температуре в угловой точке на одном из концов) или меняющейся линейно (от значения на одном конце до значения на другом). В варианте 9 область  $D$  имеет “дырку”. В вариантах 13, 15, 16, 18, 19 вдоль линии, проходящей внутри области, распределение температуры считается заданным. Точки находящиеся на этой линии являются граничными. В вариантах 14, 17, 20 в точке с координатами  $(b, c)$  температура также задается. При решении задачи для этих вариантов панельным методом эту точку необходимо заменить панелью малой длины.

Линейные размеры и координаты определяются параметрами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Эти параметры, значения температур в угловых точках, а также шаги разбиения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  и шаг по времени  $\Delta t$  должны задаваться в диалоговом режиме с экрана.

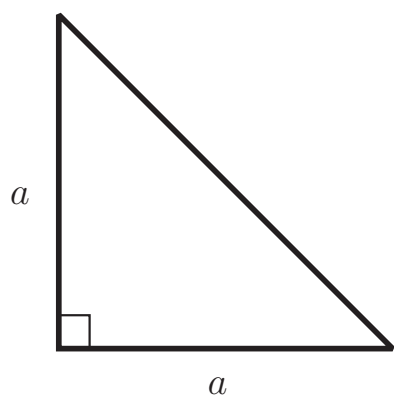
Вариант 1



Вариант 2



Вариант 3



Вариант 4

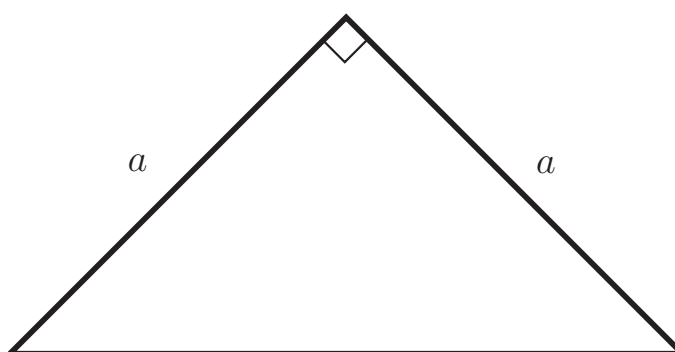
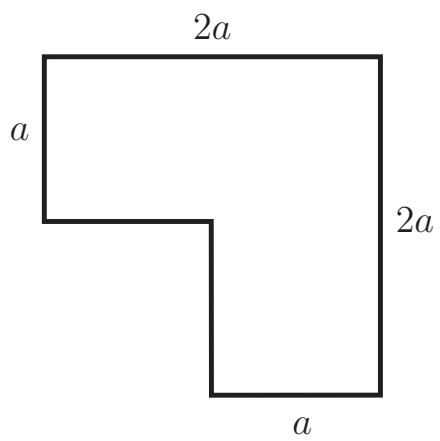
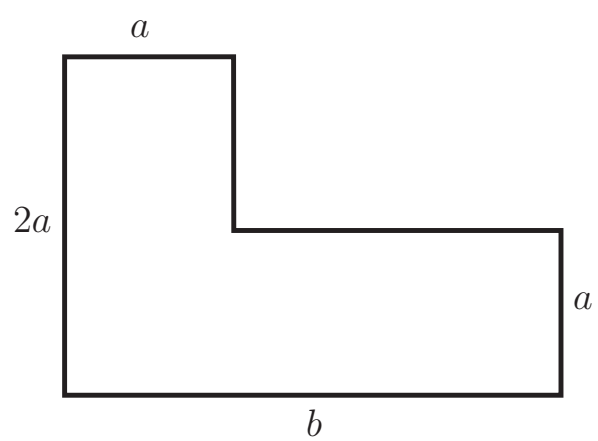


Рис. 5

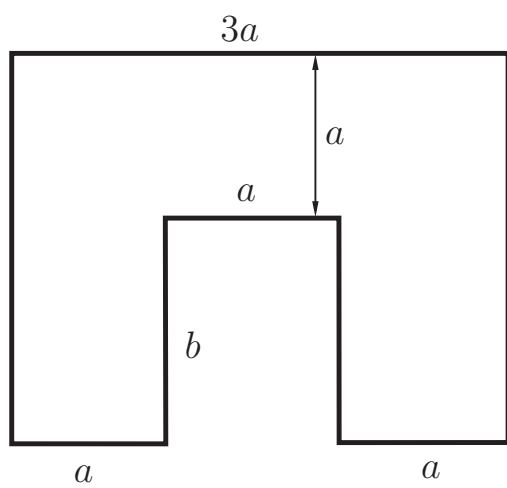
Вариант 5



Вариант 6



Вариант 7



Вариант 8

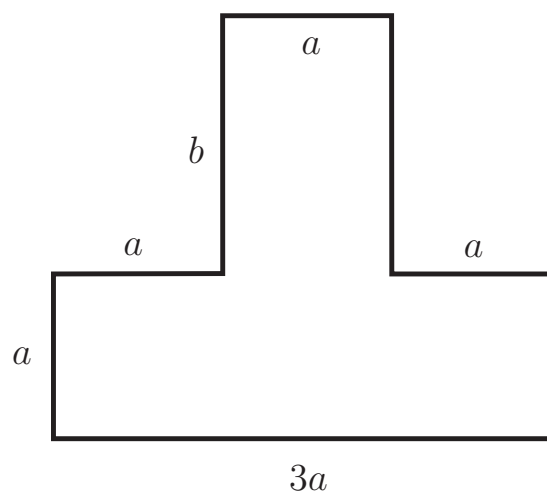
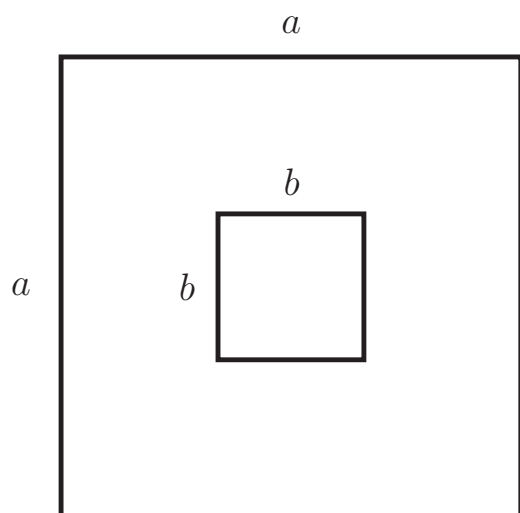


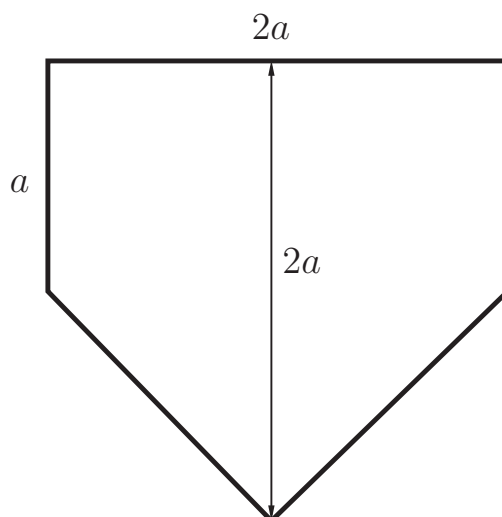
Рис. 6



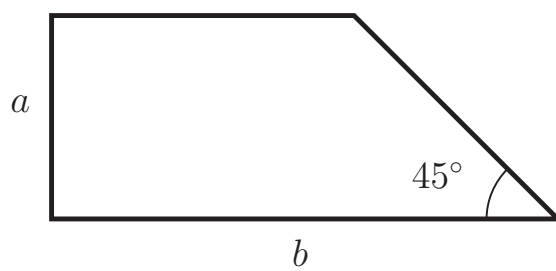
Вариант 9



Вариант 10



Вариант 11



Вариант 12

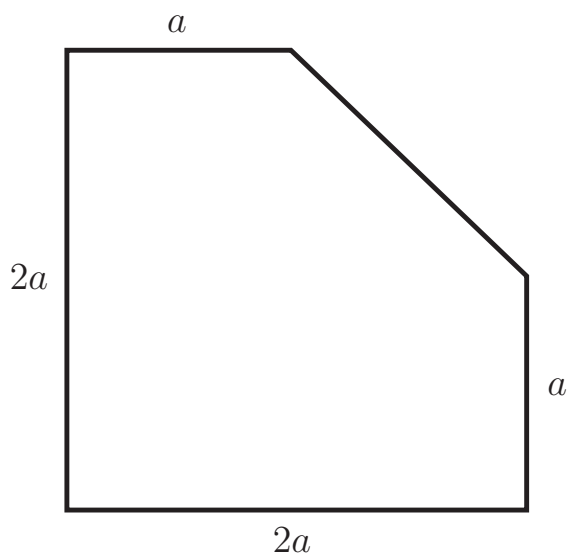
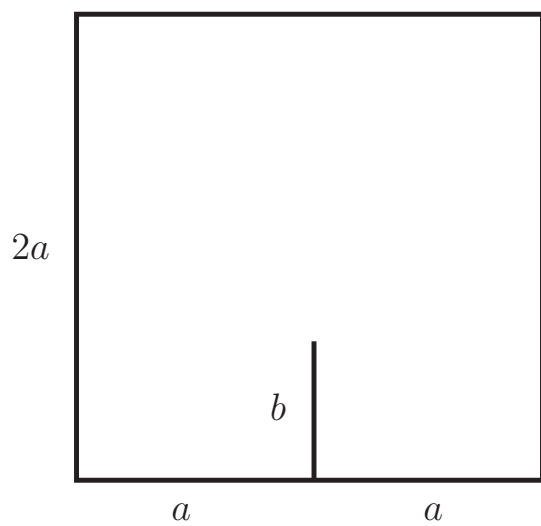
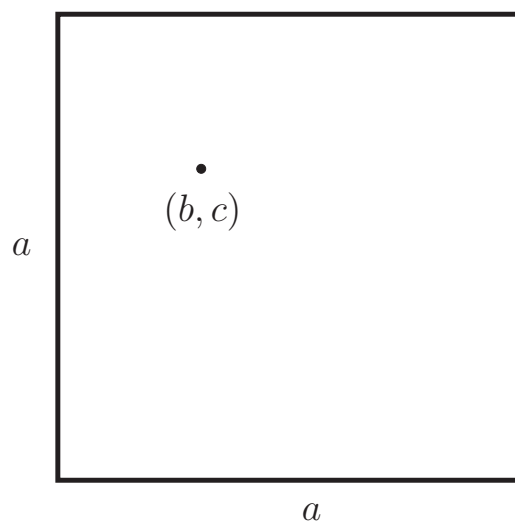


Рис. 7

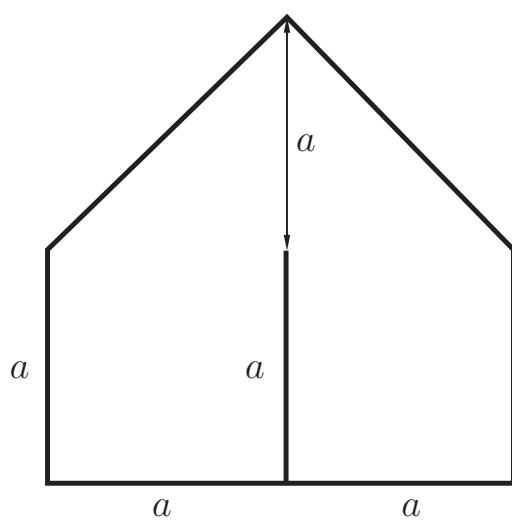
Вариант 13



Вариант 14



Вариант 15



Вариант 16

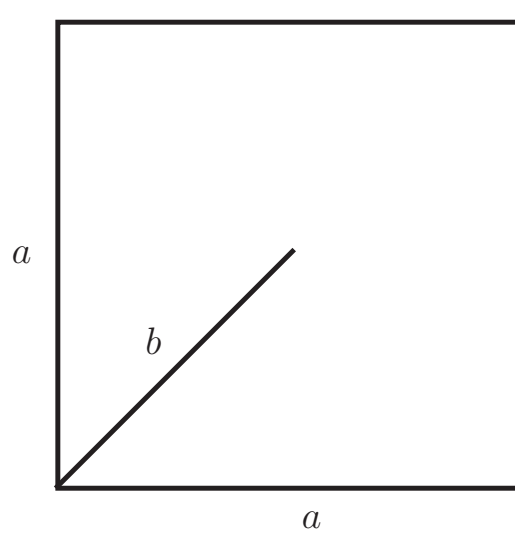
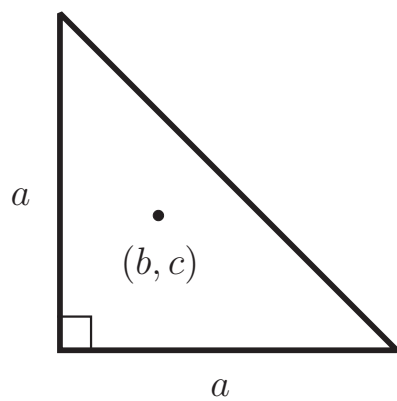
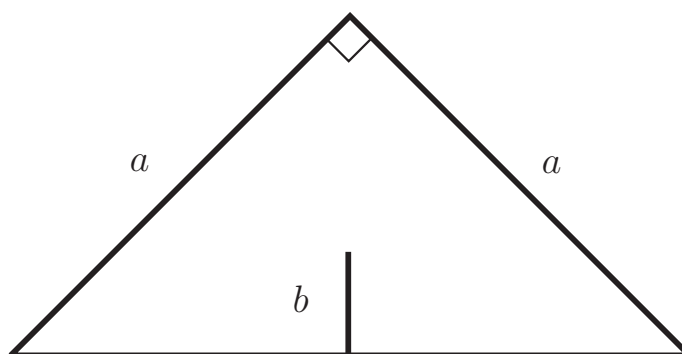


Рис. 8

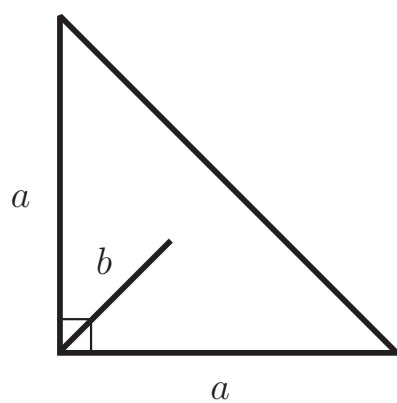
Вариант 17



Вариант 18



Вариант 19



Вариант 20

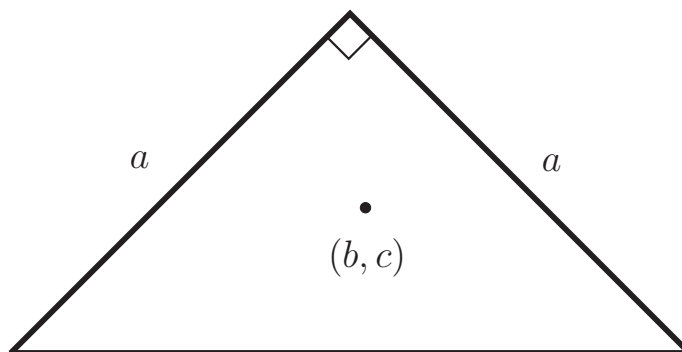


Рис. 9

## 6 Пример расчета

Для примера выберем задание варианта 1: расчет температуры в квадратной пластинке. В расчетах линейный размер  $a$  положим равным единице. Температура  $T_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$  задается в четырех угловых точках (рис. 10). Для расчета обоими методами используем разбиение с одинаковым шагом по осям  $x$  и  $y$  (шаг  $dx$  будем выбирать так, чтобы сторона квадрата разбивалась на целое число одинаковых отрезков). При расчете панельным методом каждая сторона квадрата разбивается на  $n = a/dx$  панелей, и в сумме получается  $N = 4n$  панелей. При расчете методом конечных разностей получим расчетную сетку  $(n + 1) \times (n + 1)$  узлов. Для расчетов выберем  $n = 50$ .

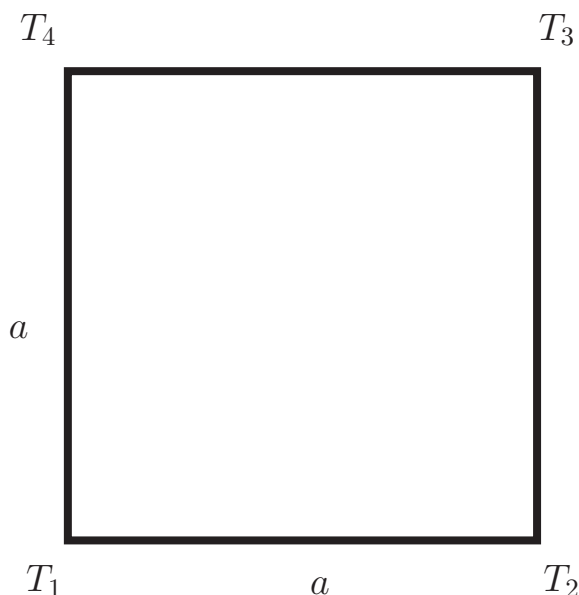


Рис. 10

Пример расчета для  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = T_3 = T_4 = 0$  в случае постоянного значения температуры на каждой из граней панельным методом и методом конечных разностей представлен на рис. 11. Решения задачи двумя методами визуально совпадают. Максимальная по модулю разность решений в узлах сетки составляет  $\Delta_{\max} = 8.61 \cdot 10^{-3}$ . На рис. 12 представлено распределение разности  $\Delta(x, y)$  решений двумя методами. Видно, что наибольшего значения  $\Delta$  достигает вблизи точек разрыва граничных условий (вблизи первой и второй угловых точек), где градиенты искомой функции максимальны.

На рис. 13 представлен пример расчета для тех же температур в узлах, но в случае линейного изменения температуры на каждой из граней. Решения задачи двумя методами также визуально совпадают. Максимальная разность решений в узлах сетки составляет  $\Delta_{\max} = 5.05 \cdot 10^{-4}$ , что на порядок меньше, чем в случае наличия разрыва граничных условий. На рис. 14 представлено распределение разности  $\Delta(x, y)$ . Погрешность здесь уже не концентрируется вблизи определенных точек, а равномерно распределена по области  $D$ , причем погрешность тем меньше, чем ближе точка к границе  $L$ .

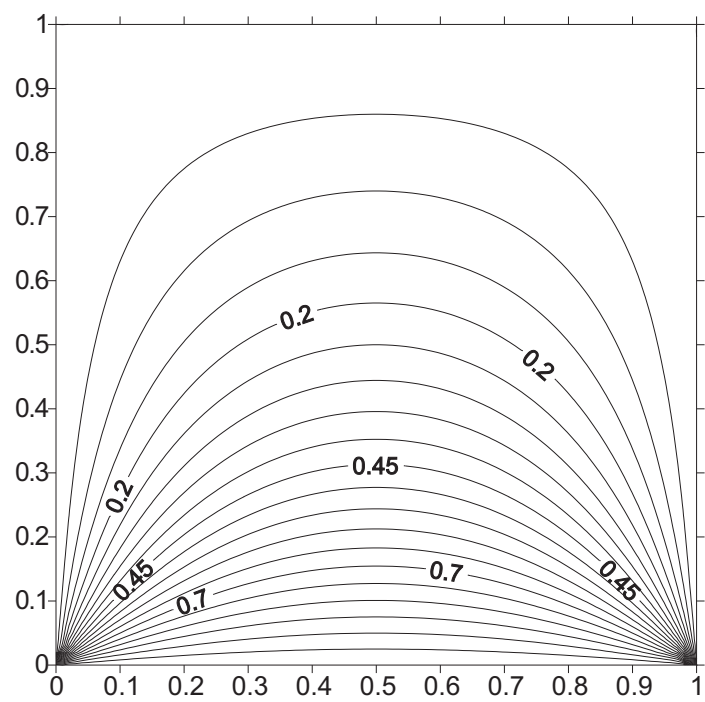


Рис. 11

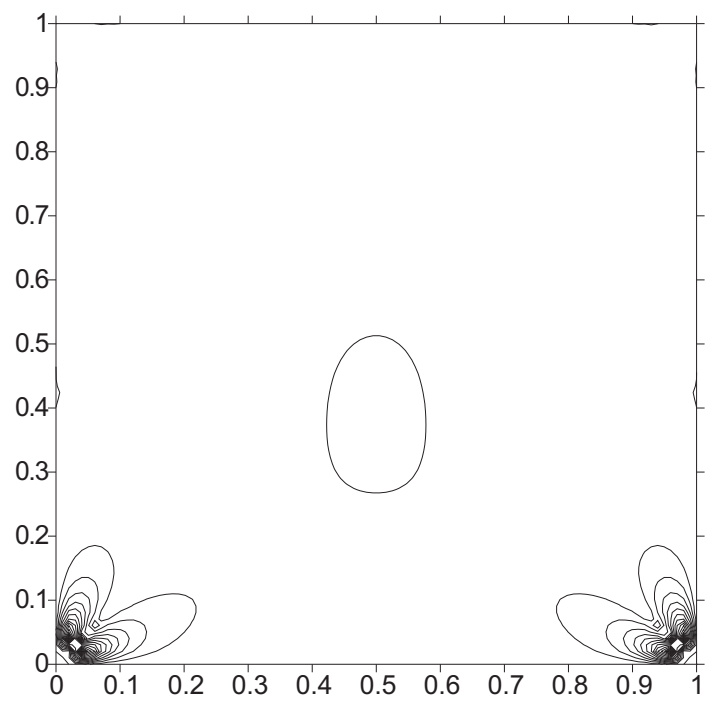


Рис. 12

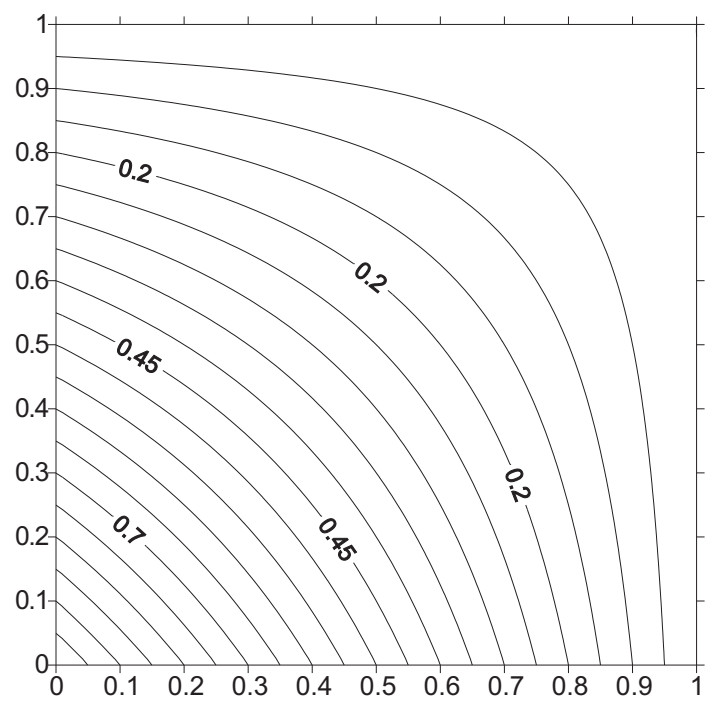


Рис. 13

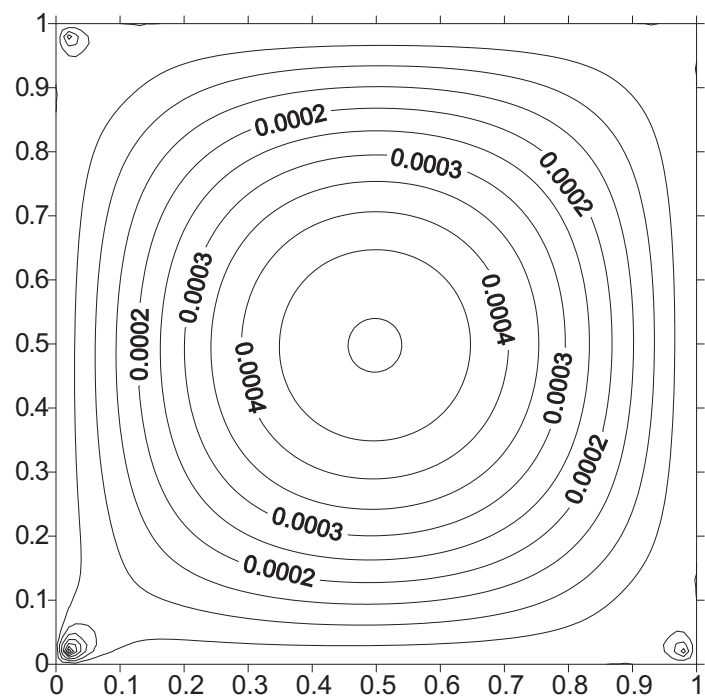


Рис. 14